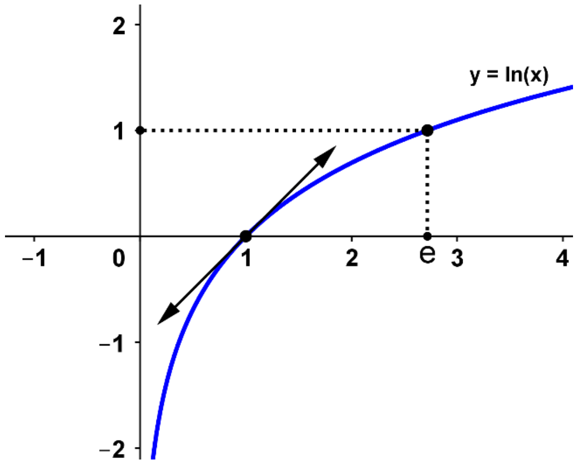
Fonctions Logarithmes

Définition et conséquences

- On appelle fonction logarithme népérien et on note ln la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.
- La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0$, $(\ln)'(x)=\dfrac{1}{x}$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$ $(e \approx 2{,}72)$
- Soit a et b deux réels strictement positifs.
  - $\ln a < 0 \Leftrightarrow 0<a<1$
  - $\ln a = 0 \Leftrightarrow a=1$
  - $\ln a > 0 \Leftrightarrow a>1$
  - $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a=b$
  - $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a>b$



Propriétés algébriques

- Soit a et b deux réels strictement positifs.
  - $\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$
  - $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
  - $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right)=-\ln b$
  - $\ln(a^r)=r\cdot\ln a$; $r\in\mathbb{Q}$
  - $\ln\left(\sqrt[p]{a}\right)=\dfrac{1}{p}\ln a$; $(p\in\mathbb{N},\ p\geq 2)$

Limites usuelles

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^r}=0$; $(r\in\mathbb{Q}_+^*)$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}x^r\ln x=0$; $(r\in\mathbb{Q}_+^*)$

Fonction ln(u)

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x)>0$ $\forall x\in I$ alors la fonction $f : x\mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $\forall x\in I$, $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $\forall x\in I$, $u(x)\neq 0$ alors la fonction $f : x\mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $\forall x\in I$, $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x)\neq 0$ $\forall x\in I$ alors la fonction $f : x\mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive sur I la fonction $f : x\mapsto \ln|u(x)|+k$; $(k\in\mathbb{R})$.
- La fonction $x\mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $x\mapsto \ln x$ sur $]0,+\infty[$.

Fonction logarithme décimal

On appelle fonction logarithme décimal, la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\log x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$