Lycée Rue Ahmed Amara Le Kef
◈ ◈ ◈
Habib Gammar

MATRICES ET SYSTÈMES

4e Eco.Gestion

I. Matrices

1) Notion de matrice

➨ Activité 1

Le tableau ci-dessous donne l'état du stock concernant deux produits de beauté B_1 et B_2 sur trois points de vente P_1, P_2 et P_3.

	B_1	B_2
P_1	70	35
P_2	30	27
P_3	27	24

1) Donner la colonne représentant l'état du stock du produit B_1 sur les trois points de ventes.

2) Donner la ligne représentant l'état du stock en B_1 et B_2 sur le point de vente P_3.

3) Que représente le nombre 24 situé à l'intersection de la troisième ligne et la deuxième colonne du tableau ?

► Les informations précédentes peuvent être résumées dans le tableau à trois lignes et deux colonnes suivant : $\begin{pmatrix} 70 & 35 \\ 30 & 27 \\ 27 & 24 \end{pmatrix}$ appelé **matrice d'ordre 3×2**

❖ Définitions

◆ n et p étant deux entiers naturels non nuls, une **matrice** d'ordre $n \times p$ est un tableau de nombres réels formé de n lignes et de p colonnes.

Ces nombres sont appelés coefficients ou termes de la matrice

❖ Notation

◆ Soit M une matrice d'ordre $n \times p$. Le coefficient situé à l'intersection de la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne est noté a_{ij}.

◆ Toute matrice M de coefficients a_{ij} avec i et j des entiers vérifiant : $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le p$ est notée (a_{ij}) et représentée comme ci-dessous.

$$\begin{array}{rcc}
 & \text{Colonnes} \rightarrow & \boxed{\begin{matrix} 1 & \cdots & j & \cdots & p \end{matrix}} \\
M = & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{matrix}} \\
 & & \uparrow \\
 & & \text{Lignes}
\end{array}$$

➡ Activité 2

1) Soit A une matrice d'ordre **3×3** dont voici certains termes :

$a_{21}=4$, $a_{32}=5$, $a_{23}=1$, $a_{13}=-5$, $a_{12}=7$, $a_{31}=3$

Recopier et compléter $A=\begin{pmatrix} 6 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$

2) Soit la matrice $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ dont les termes manquants sont : $b_{21}=4$, $b_{22}=-1$ et $b_{13}=5$

a) Recopier et Compléter B.

b) Quel est l'ordre de B ?

c) Déterminer b_{23}. Peut-on parler de b_{32} ? Pourquoi ?

➡ Activité 3

Dans la matrice M ci- dessous sont rangées les notes de trois élèves e_1, e_2 et e_3 de la manière suivante : • Pour $i\in\{1,2,3\}$, la colonne i indique les notes de l'élève e_i respectivement en mathématiques, en économie et en gestion .

$$M=\begin{pmatrix} 10 & 12 & 9 \\ 10 & 15 & 13 \\ 15 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

1) a) Donner l'ordre de M.

b) Que représente la troisième colonne de M ?

c) Que représente la première ligne de M ?

2) Quelle est la note obtenue en économie pour l'élève e_3 ?

3) On pose $M=(a_{ij})$. Donner les valeurs de a_{11} , a_{23} , a_{33} et a_{32}.

❖ Vocabulaire

- Une matrice formée d'une seule ligne et de p colonnes s'appelle une **matrice ligne** d'ordre p.
  - ▸ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne d'ordre 3.
- Une matrice formée d'une seule colonne et de n lignes s'appelle une **matrice colonne** d'ordre n.
  - ▸ $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne d'ordre 2.
- Une matrice ayant le même nombre n de lignes et de colonnes est une **matrice carrée** d'ordre n.
- La diagonale d'une matrice carrée $A=(a_{ij})$ d'ordre n est la rangée formée des coefficients a_{ii}.
  - ▸ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- La **matrice unité d'ordre n**, notée I_n, est une matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale valent 1.
  - ▸ $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

◆ Une matrice d'ordre $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls est dite **matrice nulle** d'ordre $n \times p$ cette matrice est notée O.

▶ $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle d'ordre 3.

➡ Activité 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) A est une matrice d'ordre 2×3.
2) $a_{22} = -1$.
3) $a_{32} = -5$.

❖ Propriété

◆ Deux matrices sont égales si et seulement si, elles sont de même ordre et leurs coefficients de mêmes indices sont égaux deux à deux.

➡ Activité 5

Déterminer le réel a pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 - 1 \\ 2a+2 & a^2 \end{pmatrix}$ soit égale à la matrice unité d'ordre 2.

2) Opérations sur les matrices

◆ Addition

❖ Définitions

◆ Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même ordre $n \times p$.

- La somme des deux matrices A et B, notée $A + B$, est la matrice $C = (a_{ij} + b_{ij})$ de même ordre $n \times p$.
- La différence des deux matrices A et B, notée $A - B$, est la matrice $D = (a_{ij} - b_{ij})$ de même ordre $n \times p$.

➡ Activité 6

1) Dans chacun des cas suivants, calculer $A + B$ et $A - B$:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

2) Soient $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$ où x et y sont deux réels.

Déterminer x et y pour que $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$

❖ Propriétés

◆ Soient A, B et C trois matrices d'ordre $n \times p$ et O la matrice nulle d'ordre $n \times p$.

- $A+O=O+A=A$
- $A+B=B+A$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$

➡ Activité 7

Calculer :

- $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

- $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

◆ **Multiplication d'une matrice par un réel**

➡ Activité 8

1) Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A+A$ qu'on note $2A$ puis calculer $2A+A$ qu'on note $3A$.

2) Soient $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Comparer $10A+10B$ et $10(A+B)$

❖ Définition

◆ Le produit d'une matrice A par un réel k est la matrice notée kA obtenue en multipliant chaque coefficient de A par le réel k.

❖ Propriété

◆ A et B deux matrices d'ordre $n \times p$.

- Pour tout réel k on a $k(A+B)=kA+kB$

❖ Remarques

◆ kA et A sont deux matrices de même ordre.

◆ $(-1)\cdot A=-A$ (la matrice opposée de A).

➡ Activité 9

Soient $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Calculer $A+B$, $2A$, $3B$, $2A+2B$ et $2A+3B$.

➡ Activité 10

Pour les trois premiers mois de l'année 2020, on donne l'évolution du prix hors taxes (HT) en DT de deux portables A et B par la matrice P ci-contre :

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 120 & 100 \\ 100 & 90 \\ 80 & 70 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Quel est le prix (HT) du portable B au mois de Mars 2020 ?

2) La TVA sur ces produits est de $16\,\%$. Que représente la matrice $T = 0{,}16P$

3) a) Déterminer la matrice P' représentant les prix (TTC).

b) Quel est le prix (TTC) du portable B au mois de Mars 2020 ?

3) Produit de deux matrices

➡ Activité 11

Un fleuriste vend des bouquets de fleurs. Chaque bouquet se compose de 4 roses, 5 tulipes et 3 branches de marguerite.

Une rose coûte $2\,DT$, une tulipe coûte $1{,}5\,DT$ et une branche de marguerite coûte $1\,DT$.

- La matrice ligne $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ représente la composition d'un bouquet.
- La matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$ représente les prix unitaires respectifs de chaque type de fleurs.

1) Calculer le prix d'un bouquet.

▶ Le calcul du prix d'un bouquet peut être schématisé comme suivant :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1{,}5} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = (4 \times \mathbf{2}) + (5 \times \mathbf{1{,}5}) + (3 \times \mathbf{1}) = 18{,}5$$

▶ On dit qu'on a effectué le produit de la matrice ligne A par la matrice colonne B.

2) Calculer

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

❖ Définition

◆ $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ une matrice ligne d'ordre p et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne d'ordre p.

Le produit des deux matrices A et B, noté $A \cdot B$, est le réel $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_p b_p$

➜ Activité 12

Dans la matrice $A = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} F & M & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 10 & 11 \\ 10 & 12 & 13 \\ 11 & 9 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$ sont organisées les notes obtenues, lors d'un concours,

par trois élèves e_1, e_2 et e_3 en français (F), en mathématiques (M) et en économie (E).

La matrice $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ donne les coefficients respectifs de français, des mathématiques et d'économie.

1) Donner le total des notes de chaque élève dans ce concours par une matrice colonne $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$

▸ La matrice colonne T peut être schématisé comme suit :

$$A \times C = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 11 \\ 10 & 12 & 13 \\ 11 & 9 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\times\mathbf{2}+10\times\mathbf{3}+11\times\mathbf{4} \\ 10\times\mathbf{2}+12\times\mathbf{3}+13\times\mathbf{4} \\ 11\times\mathbf{2}+9\times\mathbf{3}+12\times\mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 88 \\ 108 \\ 97 \end{pmatrix}$$

On dit qu'on a effectué le produit de la matrice A par la matrice colonne C.

2) Calculer : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

❖ Définition

◆ A est une matrice d'ordre $n \times p$ et B une matrice colonne d'ordre p.
Le produit AB de ces deux matrices est la matrice colonne d'ordre n obtenue en appliquant le principe suivant :
Le premier coefficient de AB est le produit de la première ligne de A par la matrice colonne B.
Le deuxième coefficient de AB est le produit de la deuxième ligne de A par la matrice colonne B.
et ainsi de suite jusqu'au nième coefficient du produit AB.

❖ Remarques

◆ La multiplication de deux matrices n'est possible que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la deuxième.

◆ Le produit d'une matrice d'ordre $n \times p$ par une matrice d'ordre $p \times m$ est une matrice d'ordre $n \times m$.

❖ Définition

◆ Soit $A = (a_{ik})$ une matrice à n lignes et p colonnes et $B = (b_{kj})$ une matrice à p lignes et q colonnes.
Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice, notée $A \times B = (C_{ij})$ à n lignes et q colonnes, définies par $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$

▶ Exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \\ 70 & 80 & 90 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\times 1+20\times 2+30\times 3 & 10\times 4+20\times 5+30\times 6 \\ 40\times 1+50\times 2+60\times 3 & 40\times 4+50\times 5+60\times 6 \\ 70\times 1+80\times 2+90\times 3 & 70\times 4+80\times 5+90\times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 & 320 \\ 320 & 770 \\ 500 & 1220 \end{pmatrix}$$

➡ Activité 13

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer $A\times B$, $B\times A$, $(A\times B)\times C$, $A\times(B\times C)$, A^2 , A^3, $A\times I_2$ et $I_2\times A$

➡ Activité 14

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer $A\times(B+C)$ et $A\times B+A\times C$

❖ Propriétés

- Soient A, B et C trois matrices, tels que les produits ci-dessous sont possibles, on a
  - $A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$
  - $A\times(B+C) = A\times B + A\times C$
- Pour toute matrice carrée M d'ordre 2 on a : $I_2\times M = M\times I_2 = M$
- Pour toute matrice carrée N d'ordre 3 on a : $I_3\times N = N\times I_3 = N$

➡ Activité 15

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer $A\times B$ puis $B\times A$

2) a) Calculer $A\times B + B$

b) En déduire $A^2\times B + A\times B$

II. Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3

➡ Activité 16

1) Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

▶ Le réel $4\times 5 - 3\times(-1) = 23$ s'appelle le **déterminant de la matrice M.**

On le note $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ et on écrit $dét(M) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4\times 5 - 3\times(-1) = 23$

▶ On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer $dét(A)$, $dét(B)$ et $dét(C)$.

2) Soit $N=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 2 & 1\\ -4 & -1 & 3\end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.

On désigne par Δ_{ij} le déterminant de la matrice carrée d'ordre 2 obtenue à partir de la matrice N en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne .

Exemple : $\Delta_{21}=\begin{vmatrix}0 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}$

a) Donner Δ_{11} et Δ_{31} sans les calculer.

▸ Le réel $+\mathbf{1}\times\Delta_{11}-\mathbf{3}\times\Delta_{21}+(\mathbf{-4})\times\Delta_{31}$ est **le déterminant de la matrice** N **.**

$(\mathbf{1}, \mathbf{3}$ et $(\mathbf{-4}))$ sont les coefficients qui forment la première colonne de la matrice N.

On le note $\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 2 & 1\\ -4 & -1 & 3\end{vmatrix}$

et on écrit $dét(N)=\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 2 & 1\\ -4 & -1 & 3\end{vmatrix}=+\mathbf{1}\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}-\mathbf{3}\times\begin{vmatrix}0 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}+(\mathbf{-4})\times\begin{vmatrix}0 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}$

b) On donne la matrice $D=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 1 & 7 & -2\end{pmatrix}$. Vérifier que $dét(D)=-5$.

❖ Définition

◆ Soit $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

Le déterminant de M est le réel, noté $dét(M)$, défini par $dét(M)=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=a\times d-b\times c$

◆ Soit $N=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.

Le déterminant de N est le réel, noté $dét(N)$, défini par :

$$dét(N)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=a_1\times\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}-b_1\times\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}+c_1\times\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

➡ Activité 17

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

I_2 , I_3 , $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -5 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -2 & 3 & -4\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}2 & 2 & -4\\ 2 & 2 & 5\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

III. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3

➡ Activité 18

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que $A \times A' = I_2$

2) Calculer $B \times B'$.

▶ On dit que A est **inversible** et que A' est **la matrice inverse** de A ou que A' est **l'inverse** de A.
De même pour la matrice B elle est inversible et son inverse est B'.

❖ Définition

◆ Soit $M = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On dit que M est inversible si et seulement s'il existe une matrice M' de même ordre n vérifiant : $M \times M' = M' \times M = I_n$ où I_n est la matrice unité. M' est appelée dans ce cas l'inverse de M, noté M^{-1}

❖ Remarques

◆ On admet que :
- Si une matrice carrée est inversible alors sa matrice inverse est unique.
- Si M est une matrice carrée d'ordre n et s'il existe une matrice carrée M' d'ordre n vérifiant $M \times M' = I_n$ ou $M' \times M = I_n$ alors M est inversible et son inverse est la matrice M'.

➡ Activité 19

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $A' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Vérifier que $A^{-1} = A'$ et que $B^{-1} = B'$

➡ Activité 20

1) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $A^2 = I_2$

b) A est-elle inversible ? si oui déterminer son inverse.

2) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $B^2 - 2B - I_2 = O$

b) En déduire que B est inversible et déterminer son inverse.

❖ Théorème (admis)

◆ Soit M une matrice carrée d'ordre 2 ou 3.
M est inversible si et seulement si, $dét(M) \neq 0$.

Activité 21

Soit $M=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. On suppose que $dét(M)\neq 0$.

Montrer que la matrice $M'=\dfrac{1}{dét(M)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de M.

Théorème

- Soit $M=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 telle que $dét(M)\neq 0$.

  L'inverse de M est la matrice $M^{-1}=\dfrac{1}{dét(M)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

Activité 22

1) Vérifier que $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

2) Vérifier que $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Activité 23

Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que A est inversible.

2) Pour i et j des entiers variant de 1 à 3, on désigne par A_{ij} la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne et par $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}\times dét(A_{ij})$

▶ Par exemple :

- $A_{11}=\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{-3} \\ \cancel{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \cancel{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $\Delta_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-6$

- $A_{12}=\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{-3} \\ \mathbf{0} & \cancel{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \cancel{4} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $\Delta_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0$

Vérifier que $\Delta_{13}=-3$, $\Delta_{21}=-6$, $\Delta_{22}=1$, $\Delta_{23}=-1$, $\Delta_{31}=9$, $\Delta_{32}=0$ et $\Delta_{33}=3$

3) Soit $C=(\Delta_{ij})$, $i=1,2,3$ et $j=1,2,3$. Compléter : $C=\begin{pmatrix} -6 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 9 & \cdot & 3 \end{pmatrix}$

4) **a)** Donner la matrice t_C obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de C.

b) Donner la matrice $D=\dfrac{1}{dét(A)}\times t_C$. Vérifier que $A^{-1}=D$

- Les étapes de l'activité précédente constituent un algorithme permettant de calculer l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 3 à déterminant non nul.

❖ Vocabulaires

- Les coefficients $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \times dét(A_{ij})$ sont appelés **les cofacteurs** de la matrice A.
- La matrice C est appelée **la comatrice** de la matrice A.
- La matrice t_C est appelée **la transposée** de la comatrice C.

➡ Activité 24

Déterminer les inverses des matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

IV. Résoudre des systèmes linéaires de premier degré à deux ou trois inconnues

1) Résolution d'un système en utilisant la méthode du pivot de Gauss (Rappel)

➡ Activité 25

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x + 3y + 2z = 8 \\ 2x + y + 3z = 9 \\ 3x + 2y + 5z = 15 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2) : \begin{cases} x + 5y + 7z = 3 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 4y + z = -2 \end{cases}$$

2) Résolution d'un système en utilisant l'inverse d'une matrice

➡ Activité 26

Le système $(S) : \begin{cases} -5x + 3y = 2 \\ -x + y = 5 \end{cases}$ peut être représenté sous la forme $A \times X = B$

avec $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

- A est dite **la matrice du système**.
- L'égalité $A \times X = B$ est dite **l'écriture matricielle** du système.
- La matrice colonne B est dite **la matrice des constantes.**
- Lorsque A est une matrice carrée le système est dit **système carré.**

Donner l'écriture matricielle de chacun des deux systèmes suivants :

a) $(S_1) : \begin{cases} 2.3x - 5.5y = 12 \\ 0.2x + y = 7 \end{cases}$ **b)** $(S_2) : \begin{cases} 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + y - z = 8 \\ -x + 3y + 7z = -22 \end{cases}$

❖ Théorème

- Soit A une matrice carrée d'ordre 2 ou 3 telle que $dét(A) \neq 0$
  Tout système, d'écriture matricielle : $A \times X = B$, a une solution et une seule
  et l'on a $X = A^{-1} \times B$ où A^{-1} est l'inverse de A.

❖ Remarque

- Si A est une matrice carrée non inversible alors le système $A \times X = B$
  n'a pas de solution ou a une infinité de solutions

➡ Activité 27

Pour chacun des deux systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} 3x - 10y = 4 \\ -2x + 8y = 7 \end{cases} \quad , \quad (S_2): \begin{cases} 2\sqrt{3}\,x - 2y = -1 \\ 4x - \sqrt{3}\,y = 4 \end{cases}$$

1) Donner l'écriture matricielle du système.

2) Déterminer l'inverse de la matrice du système.

3) En déduire la solution du système.

➡ Activité 28

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que $M^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2) Résoudre alors les deux systèmes suivants $(S_1): \begin{cases} x - y = 10 \\ 2x + y + z = 2 \\ -x + z = 3 \end{cases}$ et $(S_2): \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y + z = -1 \\ -x + z = 3 \end{cases}$

➡ Activité 29

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1) Calculer $A \times A'$.

2) Résoudre alors le système $(S): \begin{cases} 3x - 10y - z = 4 \\ -2x + 8y + 2z = 7 \\ 2x - 4y - 2z = 5 \end{cases}$.

➡ Activité 30

1) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Montrer que M est inversible.

b) Calculer la matrice $M^3 - M^2 + 10M$

c) En déduire la matrice inverse M^{-1} de M.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $(S): \begin{cases} -2x - y - 5z = 4 \\ x + y + 3z = -4 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases}$