❖ Dérivabilité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a.

- On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$

  Le réel ℓ est appelé nombre dérivé de f en a et noté $f'(a)$.
- On dit que f est dérivable à droite en a s'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$

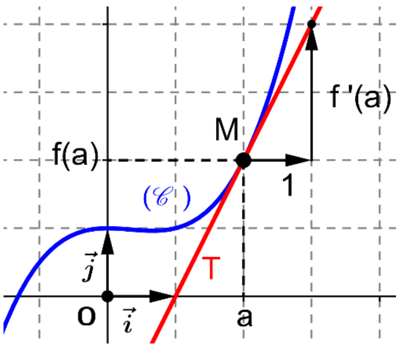
  Le réel ℓ est appelé nombre dérivé de f à droite en a et noté $f'_d(a)$.
- On dit que f est dérivable à gauche en a s'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$

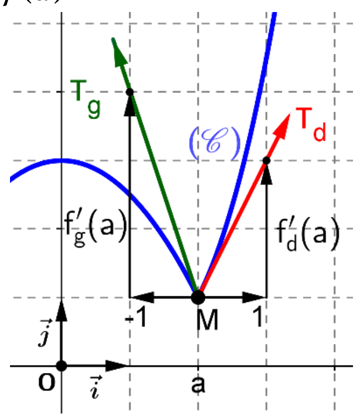
  Le réel ℓ est appelé nombre dérivé de f à gauche en a et noté $f'_g(a)$.
- f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

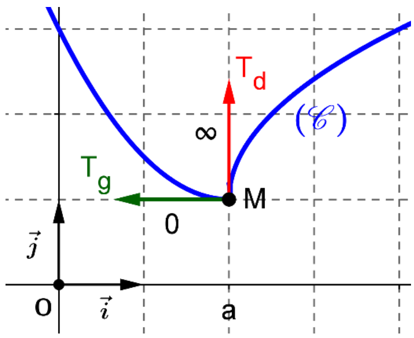
❖ Interprétation géométrique

- Si f est dérivable en a alors la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente T de coefficient directeur $f'(a)$ dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ f'(a)\end{pmatrix}$ et dont une équation est

  $T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$
- Si f est dérivable à droite en a alors la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente $T_1 : \begin{cases} y = f'_d(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$
- Si f est dérivable à gauche en a alors la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente $T_2 : \begin{cases} y = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$







❖ Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.
- La fonction f' définie sur I par $x \mapsto f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f.
- On dit que f est dérivable sur $[a,b]$ si f est dérivable sur $]a,b[$, à droite en a et à gauche en b.
- Si la fonction dérivée f' est dérivable sur I, alors sa fonction dérivée est appelée la dérivée seconde de la fonction f et on la note f''. De même la dérivée n^e (notée $f^{(n)}$).

❖ Opérations sur les fonctions dérivées – Dérivée des fonctions usuelles

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. (en respectant les conditions d'existence)

La fonction f	La fonction dérivée f'	Fonction	Fonction dérivée
$f(x)=ax+b\ ;\ (a,b\in\mathbb{R})$	$f'(x)=a$	$f+g$	$f'+g'$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$	$\alpha f\ ,(\alpha\in\mathbb{R})$	$\alpha f'$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$	$f\times g$	$f'\times g+g'\times f$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'\times g-g'\times f}{g^2}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{g}$	$\dfrac{-g'}{g^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f}$	$\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$f^n\ ,\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$	$nf'f^{n-1}$

❖ Dérivée d'une fonction composée

- Si $\begin{cases}\bullet f \text{ est dérivable en } a.\\ \bullet g \text{ est dérivable en } f(a).\end{cases}$ alors $\begin{cases}\bullet g\circ f \text{ est dérivable en } a\\ \bullet (g\circ f)'(a)=f'(a)\times g'\left(f(a)\right)\end{cases}$
- Si $\begin{cases}\bullet f \text{ est dérivable sur un intervalle } I.\\ \bullet g \text{ est dérivable sur un intervalle } J.\\ \bullet f(I)\subset J.\end{cases}$ alors $\begin{cases}\bullet g\circ f \text{ est dérivable sur } I\\ \bullet \forall x\in I, (g\circ f)'(x)=f'(x)\times g'\left(f(x)\right)\end{cases}$

❖ Sens de variation

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
  - Si f' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I alors f est strictement croissante sur I.
- Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
  - Si f est strictement croissante sur $]a,b[$ alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.

❖ Dérivabilité et continuité

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a.
  - Si f est dérivable en a alors f est continue en a. (la réciproque est fausse).

❖ Théorème et inégalité des accroissements finis

- Soit f une fonction continue sur $[a,b]$,$(a<b)$, dérivable sur $]a,b[$. $(m,M\in\mathbb{R})$.
  - **Théorème :** il existe un réel $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
  - **Inégalité :** Si $\forall x\in]a,b[,\ m\le f'(x)\le M$, alors $m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. $(M>0)$
  - **Corollaire :** Si $\forall x\in I,\ |f'(x)|\le M$ alors $\forall a,b\in I,\ |f(b)-f(a)|\le M|b-a|$