❖ Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire.

- On appelle loi de probabilité de X l'application : $\left| \begin{array}{l} P_X : X(\Omega) \to [0,1] \\ \qquad x_i \mapsto p(X = x_i) \end{array} \right.$.
  - ▸ Si X est une variable aléatoire sur Ω telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ alors $\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$
  - ▸ On peut donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à l'aide du tableau ci-dessous

Valeur de x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

- On appelle espérance mathématique ou moyenne de X le nombre $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$.
  - ▸ $E(\alpha X) = \alpha E(X)$; $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - ▸ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- On appelle variance de X le nombre $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
- On appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

❖ Fonction de répartition

- On appelle fonction de répartition de X , l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ par $F : x \mapsto p(X \le x)$
  - ▸ Exemple :

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ \frac{1}{7} \quad \text{si } x \in [1,2[\\ \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} \quad \text{si } x \in [2,3[\\ \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = 1 \text{ si } x \in [3, +\infty[\end{cases}$$

❖ Loi binomiale

- Soit une expérience aléatoire constituée de n épreuves identiques, indépendantes et n'ayant que deux issues : succès ou échec. Soit p la probabilité de l'évènement succès.

  On considère la variable aléatoire X associant à cette expérience le nombre de succès réalisés au cours des n épreuves.
  - ▸ Alors la probabilité de X est donnée par : $p(X = k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$; $k \in \{0, 1, ..., n\}$
  - ▸ On dit que X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) .
  - ▸ La loi binomiale de paramètre (n, p) est notée $B(n, p)$.
- Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n, p)$.
  - ▸ $E(X) = n \cdot p$
  - ▸ $V(X) = n\, p\, (1-p)$.
  - ▸ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

LOIS CONTINUES

	Loi uniforme sur $[a,b]$	Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$
Fonction densité	$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a\le x\le b \\ 0 & \text{si } x>b \end{cases}$	$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$
Probabilité	$[c,d]\subset[a,b]$ ♦ $p(c\le X\le d)=\int_c^d \dfrac{1}{b-a}\,dt=\dfrac{d-c}{b-a}$ ♦ $p\left(\overline{[c,d]}\right)=1-p([c,d])$	$a,b,t\in[0,+\infty[$ ♦ $p(a\le X\le b)=\int_a^b \lambda\cdot e^{-\lambda t}dt=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$ ♦ $p(X\le t)=1-e^{-\lambda t}$ ♦ $p(X>t)=1-p(X\le t)=e^{-\lambda t}$
	Pour tout réels a et b ♦ $p(\{X=a\})=0$ ♦ $p(a\le X\le b)=p(a<X\le b)=p(a\le X<b)=p(a<X<b)$	
Fonction de répartition	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x\in[a,b] \\ 1 & \text{si } x>b \end{cases}$	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$
Espérance	$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$	$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$
Variance	$V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$V(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$