❖ Généralités

- Une suite est une application de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.
- Une suite peut être définie par :
  - Une formule explicite : U_n en fonction de n, (exemple : $U_n = 5n+2$).
  - Une relation de récurrence : U_0 donné et $U_{n+1} = f(U_n)$, exemple : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 3 \end{cases}$
- Principe de raisonnement par récurrence : $P(n)$ est une propriété vraie pour tout n lorsque :

  ($P(0)$ est vraie) et (si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie).

❖ Suites arithmétiques – Suites géométriques

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$U_{n+1} - U_n = r \quad ; (r \in \mathbb{R})$	$U_{n+1} = q \cdot U_n \quad ; (q \in \mathbb{R})$
Raison	r	q
Terme général	$U_n = U_0 + n \cdot r$	$U_n = U_0 \cdot q^n$
Relation entre deux termes quelconques	$U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = U_p \cdot q^{n-p} \quad ; (q \neq 0)$
Somme des termes consécutifs	$S = \frac{N}{2}(a+b)$ N : nombre de termes a : le premier terme de la somme b : le dernier terme de la somme	$S = a \times \frac{1-q^N}{1-q} \quad ; (q \neq 1)$ N : nombre de termes a : le premier terme de la somme q : la raison de la suite
Relation entre 3 termes consécutifs a, b et c	$a + c = 2b$	$a \cdot c = b^2$
Limite	Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$ Si $r = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = U_0$	• Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ • Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \begin{cases} +\infty \ si \ U_0 > 0 \\ -\infty \ si \ U_0 < 0 \end{cases}$ • Si $q \leq -1$ alors (U_n) n'admet pas de limite • Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = U_0$

❖ Suites convergentes

- Soit (U_n) une suite réelle ; $m, M \in \mathbb{R}$ et a fini ou infini.
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = a$ **si et seulement si** $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n} = a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n+1} = a$.
- Toute suite convergente est bornée. (la réciproque est fausse).
- Si $m \le U_n \le M$ et (U_n) converge vers a **alors** $m \le a \le M$.

❖ Suites du type : $V_n = f(U_n)$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (U_n) une suite d'élément de I .
  - Si $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = a \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \end{cases}$ **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(f(U_n) \right) = b$. ; $(a, b$ finis ou infinis$)$.

❖ Limites et ordre

- Soit (U_n) , (V_n) et (W_n) trois suites ; $n \ge n_0$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.
  - Si $U_n \le V_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$, $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \ell'$ alors $\ell \le \ell'$.
  - Si $V_n \le U_n \le W_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} W_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$.
  - Si $0 \le |U_n| \le V_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.
  - Si $U_n \le V_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$.
  - Si $U_n \le V_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$.

❖ Convergence des suites monotones

- Soit (U_n) une suite définie pour $n \ge 0$.
  - Si la suite (U_n) est croissante et majorée alors elle converge vers un réel a et $U_n \le a$, $\forall n \ge 0$.
  - Si la suite (U_n) est décroissante et minorée alors elle converge vers un réel b et $U_n \ge b$, $\forall n \ge 0$
  - Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
  - Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

❖ Suites récurrentes

- Soit (U_n) une suite vérifiant :

$$\left.\begin{array}{l} * \ U_{n+1} = f(U_n) \text{ où est une fonction.} \\ * \ (U_n) \text{ converge vers } \ell. \\ * \ f \text{ est continue en } \ell \end{array}\right\} \quad \textbf{alors} \quad f(\ell) = \ell .$$

❖ Suites adjacentes

- Deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes lorsqu'elles vérifient les conditions suivantes :
  - Pour tout $n \ge 0$, $U_n \le V_n$.
  - La suite (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante.
  - La suite $(V_n - U_n)$ converge vers 0 .

Dans ce cas les suites (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite.