❖ Définition de l'intégrale

♦ Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b deux réels de I.

On appelle intégrale de a à b de f le réel noté $\int_a^b f(x)\,dx$ défini par $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

♦ $\int_a^b f(x)\,dx$ se lit « somme ou intégrale de a à b de $f(x)\,dx$ ».

♦ Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale. On note $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

❖ Propriétés

♦ Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a, b et c trois réels de I et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

► $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ ► $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

► $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ (Relation de Chasles).

► $\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$ (Linéarité de l'intégrale).

♦ ► Si $a \le b$ et $f(x) \ge 0$ $\forall x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

► Si $a \le b$ et $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

► Si $a \le b$ alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

❖ Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

♦ **Définition** :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, $(a < b)$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel $\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

♦ **Inégalité de la moyenne** :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, $(a < b)$. $m, M \in \mathbb{R}$

Si $\forall x \in [a,b]$, $m \le f(x) \le M$ alors $m \le \overline{f} \le M$.

♦ **Corollaire** :

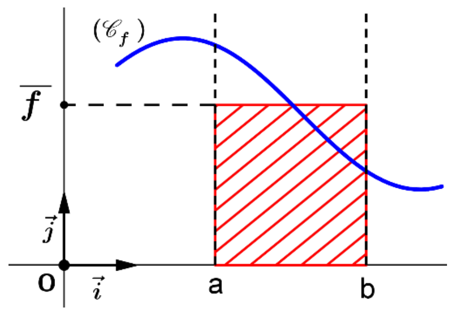
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, $(a < b)$ il existe $c \in [a,b]$ tel que $\overline{f} = f(c)$.

❖ Interprétation géométrique de la valeur moyenne

♦ Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

► L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$ et les droites $y = 0$, $x = a$ et $x = b$ est égale à celle du rectangle de côtés $(b-a)$ et $\overline{f}$.



❖ Intégration par parties

♦ Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ et telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur $[a,b]$ alors $\int_a^b u(t)\cdot v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\cdot v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\cdot v(t)\,\mathrm{d}t$.

❖ Théorèmes

♦ Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0 et $a \in I$ alors

▶ Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

▶ Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

♦ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T alors $\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

❖ Fonction définie par une intégrale

♦ **Théorème** :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. alors

▶ La fonction G définie sur I par $G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.

▶ La fonction G est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $G'(x) = f(x)$.

♦ **Théorème** :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et f une fonction définie sur un intervalle J.

▶ Si
- u est dérivable sur I
- f est continue sur J
- $u(I) \subset J$
- $a \in J$

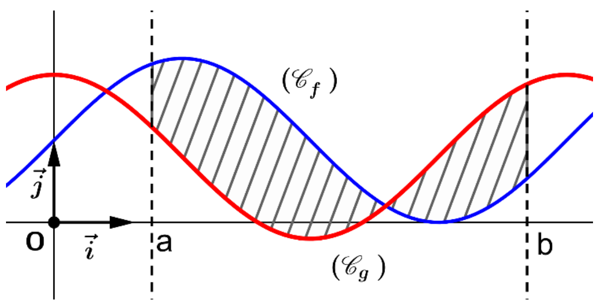
alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $F'(x) = u'(x)\cdot f\left(u(x)\right)$

❖ Calcul d'aire

♦ Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.

▶ L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et les droites $x=a$ et $x=b$ est le réel $\mathscr{A} = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.



❖ Calcul de volume

♦ L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

▶ Le volume $\mathscr{V}$ du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $AB = \{M(x,y) \text{ tels que } y=f(x) \text{ et } a \le x \le b\}$ au tour de l'axe $(O,\vec{i})$ est le réel $\mathscr{V} = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.