❖ Bijection

✦ Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

❖ **Définition** :

▸ On dit que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ (ou que f est une bijection de I sur $f(I)$), si pour tout y de $f(I)$, l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans I.

❖ **Théorème** :

▸ Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

❖ Fonction réciproque

✦ Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$.

❖ **Définition** :

▸ On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie sur $f(I)$ qui à tout y de $f(I)$ associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x)=y$.

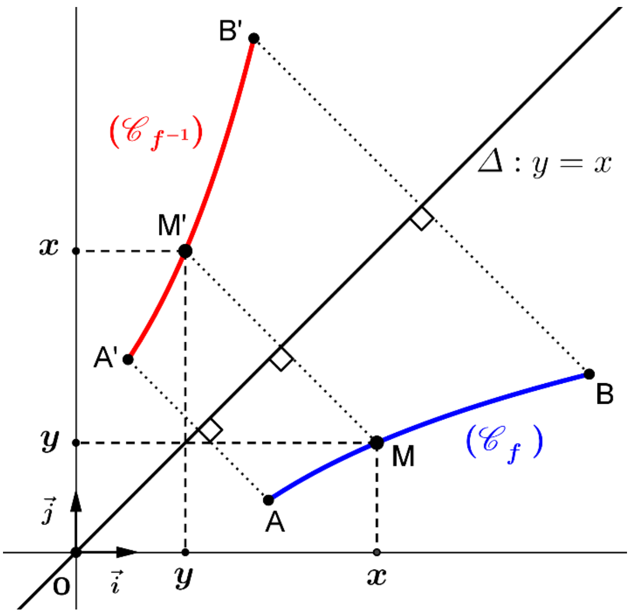
❖ **Conséquences** :

▸ $\left(f(x)=y \;\; ; x\in I\right) \Leftrightarrow \left(f^{-1}(y)=x \;\; ; y\in f(I)\right)$

▸ $f^{-1}\circ f(x)=x \;\; ; \forall x\in I$ ▸ $f\circ f^{-1}(y)=y \;\; ; \forall y\in f(I)$

▸ Si f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur $f(I)$ et varie dans le même sens de variation que f.

▸ Les courbes respectives d'une bijection f et sa réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : y=x$.

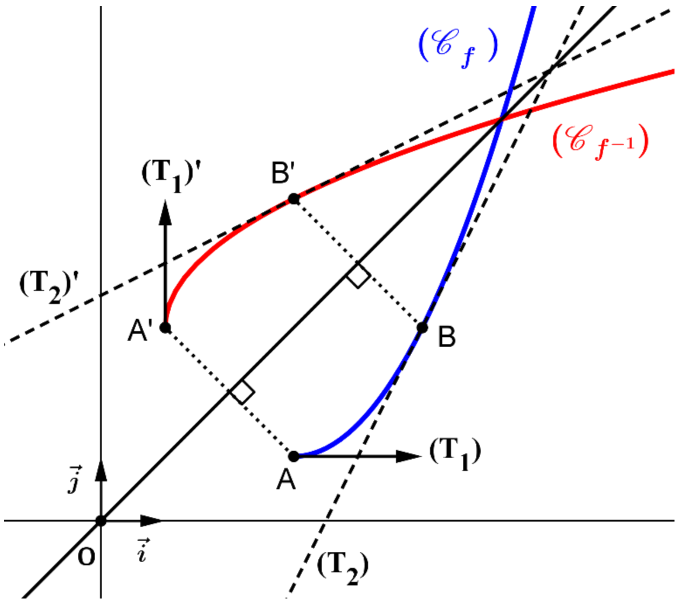


❖ Dérivée de la fonction réciproque

✦ Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$ et $a \in I$.

▶ Si $\begin{cases} f(a) = b \\ f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{cases}$ alors $\begin{cases} f^{-1} \text{ est dérivable en } b \\ (f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} = \dfrac{1}{f'(a)} \end{cases}$

▶ Si $\begin{cases} f(I) = J \\ f \text{ est dérivable sur } I \\ \forall x \in I,\ f'(x) \neq 0 \end{cases}$ alors $\begin{cases} f^{-1} \text{ est dérivable sur } J \\ \forall x \in J\ ,\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \end{cases}$



❖ La fonction racine n$^{\text{ème}}$

✦ Soit n et p deux entiers tels que $n \geq 2$ et $p \geq 2$ et soit a et b deux réels positifs.

❖ **Définition** :

▶ La fonction $x \mapsto x^n$ est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

▶ Sa fonction réciproque f^{-1} est définie sur $[0,+\infty[$ par $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$, appelée fonction racine n$^{\text{ème}}$. On note également, $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$, (Pour $n = 2$, $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$).

❖ **Conséquences** :

▶ $\forall x, y \in [0,+\infty[\ :\ \left(x^n = y\right) \Leftrightarrow \left(x = \sqrt[n]{y}\right)$

▶ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

❖ **Propriétés** :

▶ $\sqrt[n]{a^n} = a$

▶ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

▶ $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

▶ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$

▶ $a^{\frac{p}{n}} = \left(a^p\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$

▶ $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$

▶ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$

▶ $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$