► Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. ($z,z' \in \mathbb{C}$; $a,b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$)

❖ Définitions et notations

- ✦ L'affixe du point $M(a,b)$: $z_M = a + ib$
- ✦ $Aff(\overrightarrow{AB}) = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- ✦ Partie réelle de z : $\mathrm{Re}(z) = a$
- ✦ Partie imaginaire de z : $\mathrm{Im}(z) = b$
- ✦ $z = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 0$
- ✦ $I = A * B \Leftrightarrow z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

❖ Conjugué d'un nombre complexe

- ✦ Le conjugué de $z = a + ib$: $\bar{z} = a - ib$
- ✦ $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2a$
- ✦ $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z) = 2ib$
- ✦ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- ✦ $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$
- ✦ $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
- ✦ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$; $(z' \neq 0)$
- ✦ $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$; $(z \neq 0)$
- ✦ $\overline{\left(\dfrac{1}{z^n}\right)} = \dfrac{1}{(\bar{z})^n}$; $(z \neq 0)$
- ✦ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z$
- ✦ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

❖ Module d'un nombre complexe

- ✦ Le module de z_M : $|z_M| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$
- ✦ $AB = |z_B - z_A|$
- ✦ $z.\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$
- ✦ $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- ✦ $|z^n| = |z|^n$
- ✦ $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- ✦ $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$; $(z' \neq 0)$
- ✦ $|z| = |\bar{z}|$
- ✦ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

❖ Argument d'un nombre complexe non nul

- ✦ Argument de z_M : $\arg(z) \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})[2\pi]$
- ✦ $\arg(z \cdot z') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$
- ✦ $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\,[2\pi]$
- ✦ $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\,[2\pi]$
- ✦ $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\,[2\pi]$
- ✦ $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\,[2\pi]$
- ✦ $\arg(z^n) \equiv n \cdot \arg(z)\,[2\pi]$
- ✦ $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}) \equiv \arg(z_B - z_A)\,[2\pi]$
- ✦ $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

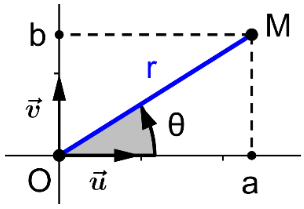
❖ Colinéarité et orthogonalité de deux vecteurs

✦ Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ deux vecteurs tels que $\vec{v} \neq \vec{0}$

► $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si et seulement si, $\dfrac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} = \dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C}$ est réel.

► $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $\dfrac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} = \dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C}$ est imaginaire.

❖ Ecritures d'un nombre complexe



✦ Forme algébrique (ou cartésienne) : ► $z = a + ib \;;\; (a, b \in \mathbb{R})$

♦ On pose : $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\arg(z) \equiv \theta \,[2\pi]$

✦ Forme trigonométrique $(z \neq 0)$: ► $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$; avec $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}$

✦ Forme exponentielle $(z \neq 0)$: ► $z = r \cdot e^{i\theta}$; avec $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

❖ Ecriture exponentielle

$(\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $k, n \in \mathbb{Z})$

✦ $e^{i0} = 1$ ✦ $e^{i\pi} = -1$ ✦ $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ ✦ $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

✦ $|e^{i\theta}| = 1$ ✦ $e^{i(\theta + 2k\pi)} = e^{i\theta}$ ✦ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ ✦ $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

✦ $e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ ✦ $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ ✦ $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ ✦ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

❖ Formule de Moivre

✦ Pour tout réel θ et pour tout entier n : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

❖ Formules d'Euler

✦ Pour tout réel θ : ► $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ ► $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

❖ Racines nièmes

✦ Soit a un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = r \cdot e^{i\theta}$.

► L'équation $z^n = a$ admet dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes définies par :

$$z_k = \sqrt[n]{r}\; e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad , \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

► Lorsque $n \geq 3$, les points images des racines nièmes d'un nombres complexe non nul sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

❖ Equations du second degré

✦ L'équation $az^2 + bz + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0)$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions

$z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ est une racine carrée de Δ.

✦ $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ ✦ $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ ✦ $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$

✦ Si $z^2 = a + ib$; $(a, b \in \mathbb{R})$ et $z = x + iy$; $(x, y \in \mathbb{R})$ alors $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$